فصلنامه رویکردهای پژوهشی نو در علوم مدیریت
Journal of New Research Approaches in Management Science
سال دوم. شماره هفتم. تابستان ۱۳۹۷، صص۱۹۰-۱۵۹ Vol 2. No 7. 2018, p 159-190
شماره شاپا (۲۵۸۸-۵۵۶۱) ISSN: (2588-5561)

تأثیر ریسک های مرگ و میر سیستماتیک و غیر سیستماتیک در سرمایه‌های اولیه (مطالعه موردی: صندوق‌های بازنشستگی)

فروزان باقری. دکتر امین حسن زاده

چکیده

ریسک سرمایه گذاری را میزان اختلاف میان بازده واقعی سرمایه‌گذاری با بازده مورد انتظار تعریف می‌کنند. بیشتر سرمایه گذاران بر این باورند که بازده ی واقعی کمتر از بازده مورد انتظار است. از طرفی هر چه پراکندگی بیشتر باشد ریسک نیز بیشتر خواهد بود. به هنگام مقایسه سرمایه گذاری‌های مختلف، هر چه ریسک‌های یک سرمایه‌گذاری بیشتر باشد انتظار بازدهی مورد بحث به شرطی که سرمایه از بین نرود، بیشتر می‌باشد و یا به عبارتی دیگر نرخ بازدهی رابطه‌ی مستقیم با میزان ریسک های ذاتی سرمایه گذاری انجام شده دارد. به این دلیل در ادامه، انواع ریسک‌های سرمایه گذاری در بازارهای مالی و سرمایه را از نظر یک سرمایه گذار، مورد ارزیابی قرار می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: سرمایه، ریسک، بازار مالی، بازده، ریسک ذاتی.

[Downloaded from mail.jnraims.ir on 2026-11-19]

ریسک نوسان در نرخ بهره

ریسک نرخ بهره، ریسکی است که سرمایه گذار به هنگام خرید اوراق قرضه با قبول بهره ی ثابت آن را می پذیرد. قیمت چنین اوراق قرضه ای در صورت افزایش نرخ بهره در بازار کاهش می‌یابد و دارنده ی آن در صورت فروش اوراق قرضه‌ی خود قبل از سررسید متحمل زیان می‌شود. قیمت اوراق قرضه رابطه‌ی معکوسی با نرخ بهره دارد، به عبارت دیگر با افزایش نرخ بهره، قیمت اوراق قرضه کاهش و با کاهش نرخ بهره، قیمت اوراق قرضه افزایش می‌یابد. احتمال کاهش قیمت اوراق قرضه به دلیل افزایش نرخ بهره‌ی بازار را ریسک نوسان در نرخ بهره می‌نامند. در چنین وضعی، اگر دارنده ی اوراق قرضه، به جای نگهداری آن تا تاریخ سررسید اقدام به فروش آن کند، نرخ بازده واقعی سرمایه گذار از نرخ بازده مورد انتظار وی کمتر خواهد شد. اگر قیمت اوراق قرضه ی فروش رفته به شدت کاهش یابد، امکان دارد که نرخ بازده سرمایه گذاری آن منفی شود. این ریسک در اکثر اوراق قرضه وجود دارد. اصولاً شدت ریسک نوسان نرخ بهره ی اوراق قرضه تابعی است از مدت زمانی که به تاریخ سررسید آن مانده است. معمولاً نرخ بهره و سررسید اوراق قرضه در میزان ریسک نوسان نرخ بهره ی آن اوراق قرضه تأثیر می گذارد. بنابراین، اگر شرکتی چند دسته اوراق قرضه منتشر کند که دارای نرخ ها و تاریخ های سررسید متفاوت باشند، هر یک از این دسته ها دارای ریسک نوسان نرخ بهره ی مخصوص به خود خواهند بود. تأثیر ریسک نوسان نرخ بهره بر روی اوراق قرضه خیلی بیشتر از سهام عادی است و بیشتر مورد توجه دارندگان اوراق قرضه است. (رز و همکاران، ۲۰۰۳)، (هورچر، ۲۰۰۵).

نرخ تورم برابر است با تغییر در یک شاخص قیمت که معمولاً شاخص قیمت مصرف کننده است. تورم دلالت بر وضعیتی دارد که در نبود کنترلی مؤثر، به صورت افزایش بهای یک واحد از کالای تولید شده آشکار می‌شود. تورم معمولاً با افزایش واقعی یا بالقوه ی سطح عمومی قیمت ها همراه است. در بعضی مواقع تورم زمانی به وجود می‌آید که سطح عمومی قیمت ها به میزانی که افزایش در بازدهی عوامل و فرایندهای اقتصادی ایجادب می‌کنند تنزل نیابد. تورم آنطور که معمولاً فهمیده می‌شود، رابطه ای با افزایش نامعمول قیمت‌ها دارد. زمانی که اقتصاددانان درباره تورم صحبت می‌کنند، به رشد سطح عمومی قیمت‌ها اشاره دارند، تورم یعنی باید برای خرید کالاها و خدمات، پول بیشتری پرداخت شود. پاره ای دیگر از تعاریف، تورم را سیر تراکمی افزایش قیمت‌ها و برگشت ناپذیری آن تعریف کرده اند. صاحب نظران دیگری همچون ریمون بار، ژان مارشال و گونار میردال تورم را افزایش زیاد و مداوم قیمت ها تعریف کرده اند. اگر رشد دستمزدها با رشد بهره وری در اقتصاد یکسان باشد، تورم به وجود نخواهد آمد.

محاسبه ی سرمایه اولیه ی صندوق با توجه به مدل بندی های متفاوت

شناسایی دقیق احتمال های مرگ و میر برای صندوق های بازنشستگی از اهمیت ویژه ای برخوردار است، چرا که محاسبه‌ی مزایای هر فرد عضو صندوق و محاسبه‌ی سرمایه‌ی مورد نیاز صندوق برای ایفای

[Downloaded from mail.jnraims.ir on 2026-11-19]

تعهدهای خود به زنده ماندن یا فوت افراد عضو صندوق کاملاً وابسته است. ارزیابی اثرهای ریسک مرگ و میر سیستماتیک و غیر سیستماتیک روی سرمایه ی مورد نیاز یک طرح صندوق بسیار حیاتی است.

هر صندوق برای حفظ بقای خود به دنبال سرمایه گذاری دارایی‌هایش در بخش های مختلف مالی است. نرخ بازده سرمایه گذاری به نوع بازارهای مالی انتخاب شده و نحوه ی سرمایه‌گذاری در آن ها وابسته است.

مدل های تصادفی مرگ و میر و بازارهای مالی

همانطور که اشاره شد، جدول عمر و در نتیجه احتمال های مرگ و میر یکی از اساسی ترین مباحث بیمه‌ای بخصوص در صندوق های بازنشستگی به شمار می رود و دقت در محاسبه‌ی این احتمال ها از اهداف مهم پیش روی بیمه گران می باشد.

به دنبال هدف این پایان نامه، برای محاسبه ی مقدار مزایای سالیانه ی صندوق، به این احتمال ها نیاز داریم. در این بخش با استفاده از تبدیل لوجیت و متغیرهای جمعیتی و مالی، به مدل بندی احتمال های مرگ و میر سالانه ی افراد می پردازیم.

می خواهیم بر مبنای تحلیل های آماری، مدلی را برازش دهیم که مفاهیم زیر را در بر داشته باشد:

ارتباط بین تولید ناخالص داخلی و مرگ و میر در میان افراد سالخورده

ارتباط بین تولید ناخالص داخلی و نرخ های بهره

ارتباط بین احتمال های بقاء و مقادیر گذشته اش

احتمال آنکه شخصی به سن x در زمان $\mathbf{t}$ تا یک سال بعد زنده باشد، که با نماد $p_{x,t}$ نشان می دهیم، را می توان به صورت زیر فرمول بندی کرد.

$$p_{x,t} = \frac{exp\left(\sum_{i=1}^{n} v_t^i \phi^i(x)\right)}{1 + exp\left(\sum_{i=1}^{n} v_t^i \phi^i(x)\right)}$$

که در آن ϕ^i ها تابع های پایه ای دلخواه و v_t^i عامل های ریسکی هستند که در طول زمان ممکن است تغییر کنند. به عبارت دیگر، لوجیت احتمال بقای سالیانه ی فردی به سن x در زمان $\mathbf{t}$، به صورت زیر است:

[Downloaded from mail.jnraims.ir on 2026-11-19]

$$logit\, p_{x,t} := ln\left(\frac{p_{x,t}}{۱ - p_{x,t}}\right) = \sum_{i=۱}^{n} \upsilon_t^i \phi^i(x)$$

تبدیل لوژستیک دلالت به این دارد که احتمال های $p_{x,t}$ و $q_{x,t} = ۱ - p_{x,t}$ در فاصله ی (۱ و ۵) قرار دارند.

با کمک یک انتخاب مناسب تابع ϕ^i، می توان ویژگی های مطلوب و معینی را در مدل گرداوری کرد. به طور مثال، تابع های پایه ای می توانند به گونه ای انتخاب شوند که احتمال های بقای $p_{x,t}$ یک وابستگی معینی به سن x داشته باشند.

تابع های ϕ_i روی مجموعه ی $\mathbf{A}$ از گروه های سنی، مستقل خطی هستند، اگر رابطه ی زیر تنها به ازای بردار $\upsilon = ۰$ برقرار باشد:

$$\sum_{i=۱}^{n} \upsilon_i \phi_i(x) = ۰ \quad \forall x \in A$$

انتخاب تابع های پایه ای، همچنین تفسیر عامل های ریسک را تعیین می کند. به طور مثال، اگر تابع های پایه ای برای یک سن مشخص x را به صورت $\phi_k(x) = ۱$ و برای $\phi_i(x) = ۰ \;،\; i \neq k$ داشته باشیم، آنگاه عامل ریسک υ_k **(t)** برابر است با لوجیت احتمال بقاء در سن x در سال $\mathbf{t}$ ام. (ارو و پنانن، ۲۰۱۱) در این پایان نامه مدل سه عاملی با تابع های پایه ای خطی به صورت زیر را به کار می بریم:

$$\phi^۱(x) = \begin{cases} ۱ - \frac{x-۱۸}{۳۲} & x \leq ۵۰ \\ ۰ & x \geq ۵۰ \end{cases}$$

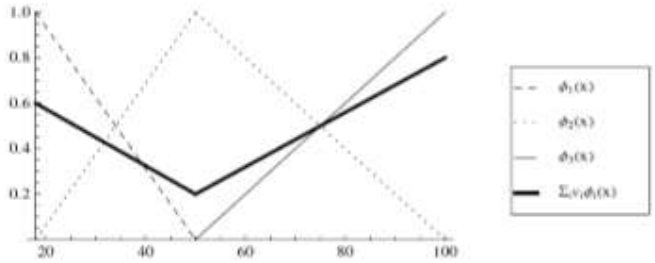
$$\phi^۲(x) = \begin{cases} \frac{x-۱۸}{۳۲} & x \leq ۵۰ \\ ۲ - \frac{x}{۵۰} & x \geq ۵۰ \end{cases}$$

$$\phi^۳(x) = \begin{cases} ۰ & x \leq ۵۰ \\ \frac{x}{۵۰} - ۱ & x \geq ۵۰ \end{cases}$$

[Downloaded from mail.jnraims.ir on 2026-11-19]

ترکیب خطی $\sum_{i=1}^{n} v_i \phi_i(x)$ تکه ای خطی و پیوسته است. شکل (۳. ۱) را ببینید.

دلیل انتخاب این توابع پایه را می توان به این صورت شرح داد که، با توجه به اینکه افراد در گروه های سنی مختلف در معرض ریسک های مرگ و میر متفاوتی قرار می گیرند، با انتخاب این توابع



شکل ۳. ۱: توابع پایه ای خطی و ترکیب خطی آن ها، با مقدارهای $v_1 = ۰/۶, v_2 = ۰/۲, v_3 = ۰/۸$.

پایه ای سعی داریم، ریسک‌های مرگ و میر گروه های سنی مختلف را در پیش بینی احتمال های مرگ و میر دخالت دهیم. در اینجا ما به بررسی عوامل ریسکی که گروه های جوان، میانسال و سالخورده را تهدید می کند می پردازیم.

در ادامه افراد با سن ۱۸ سال را جزء گروه جوان، افراد به سن ۵۰ سال را عضو گروه میانسال و افراد با سن ۱۰۰ سال را عضو گروه سالخورده طبقه بندی کرده ایم. به طور مثال در یک کشور توسعه یافته، مرگ و میر افراد جوان کمتر است و معمولاً علت فوت این افراد، تصادف‌ها، خودکشی و یا حمله های جنگی گزارش می‌شود. در گروه‌های میانسال این جوامع عواملی مثل استعمال دخانیات، فشار خون نامنظم، سکته‌های قلبی و غیرهف افراد را تهدید به مرگ می کند و در نهایت از عواملی که بر مرگ و میر افراد سالخورده جامعه اثرگذار است می توان به کاهش سطح سلامتی آن ها اشاره کرد، که مرگ و میر این گروه از افراد جامعه می‌تواند رابطه مستقیمی با میزان خدمات بهداشتی و رفاهی که دولت در اختیار افراد می گذارد داشته باشد. (ارو و پنانن، ۲۰۱۱).

در ادامه به تحلیل آماری از عامل های ریسک مرگ و میر و عامل‌های اقتصادی می‌پردازیم. همچنین ارتباط بین مرگ و میر و عوامل اقتصادی را بررسی کرده و سپس به بررسی رفتار عوامل ریسک مرگ و میر در کشور آمریکا می پردازیم. داده های مورد استفاده مربوط به سال های ۱۹۶۲ تا ۲۰۰۰ می باشد و همچنین، از سایت مجموعه داده های مرگ و میر انسانی گرفته شده است.

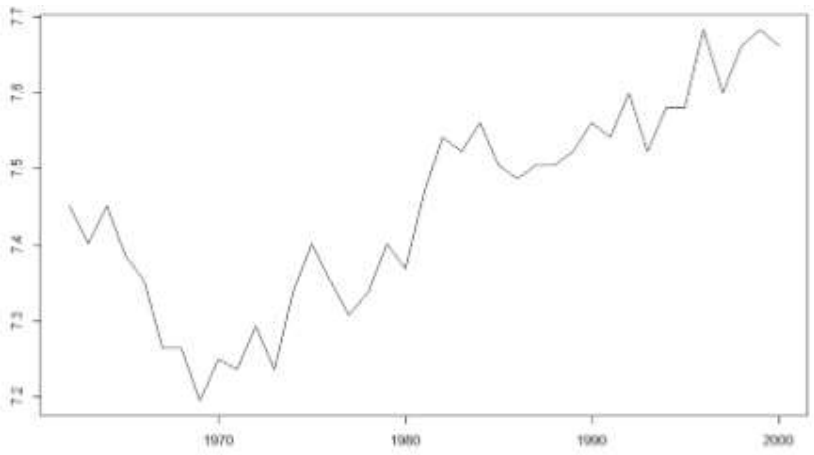
[Downloaded from mail.jnraims.ir on 2026-11-19]

تحلیل های آماری عامل ریسک $v^{۱}$

این عامل ریسک در زمان **t**، لوجیت احتمال بقای سالانه تمام افراد با سن ۱۸ سال در زمان **t** را بیان می کند.

$$v_t^{۱} = logit\ p_{۱۸,t}$$

شکل (۳. ۲)، نشان می دهد که احتمال بقاء برای زنان جوان آمریکا به سن ۱۸ سال، با گذشت زمان افزایش یافته است. در حالت کلی مرگ و میر این افراد جوان در کشور آمریکا کمتر است و معمولاً آن ها به دلایلی از جمله تصادف ها، حمله ها و خودکشی فوت می شوند.



شکل ۳. ۲: مقادیر پیشین عامل ریسک $v^{۱}$ برای زنان ایالات متحده ی آمریکا

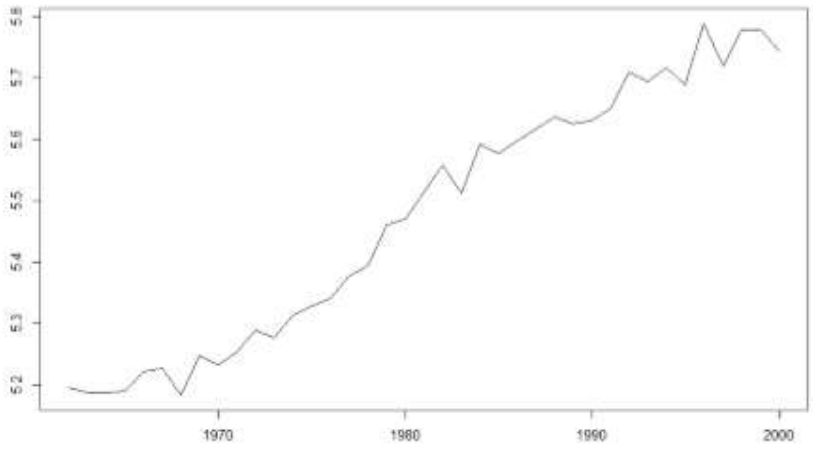
تحلیل های آماری عامل ریسک $v^{۲}$

این عامل ریسک در زمان **t**، لوجیت احتمال بقای سالانه تمام افراد با سن ۵۰ سال در زمان **t** را بیان می کند.

$$v_t^{۲} = logit\ p_{۵۰,t}$$

کاهش معنی دار در بیماری گرفتگی قلبی یک عامل کلیدی افزایش سریع احتمال بقای جمعیت میانسال در طول دهه ی اخیر است. این نتیجه در عامل ریسک $v^{۲}$، متناظر با احتمال بقای ۵۰ ساله ها منعکس شده است. شکل (۳. ۳) را ببینید.

[Downloaded from mail.jnraims.ir on 2026-11-19]



شکل ۳. ۳: مقادیر پیشین عامل ریسک $v^{۲}$ برای زنان ایالات متحده ی آمریکا

از عوامل مهمی که باعث بهبود احتمال بقاء در این سنین شده است، می‌توان به پیشرفت در درمان های پزشکی، کاهش عواملی مثل فشار خون، کلسترول و مصرف سیگار اشاره کرد. از طرفی بهبود در روش زندگی، منجر به بهبود این عامل ریسک شده و در نتیجه باعث می‌شود تا این عامل در آینده روندی یکنواخت داشته باشد.

تحلیل های آماری عامل ریسک $v^{۳}$

این عامل ریسک در زمان **t**، لوجیت احتمال بقای سالانه تمام افراد با سن ۱۰۰ سال در زمان **t** را بیان می کند.

$$v_t^{۳} = logit\, p_{۱۰۰,t}$$

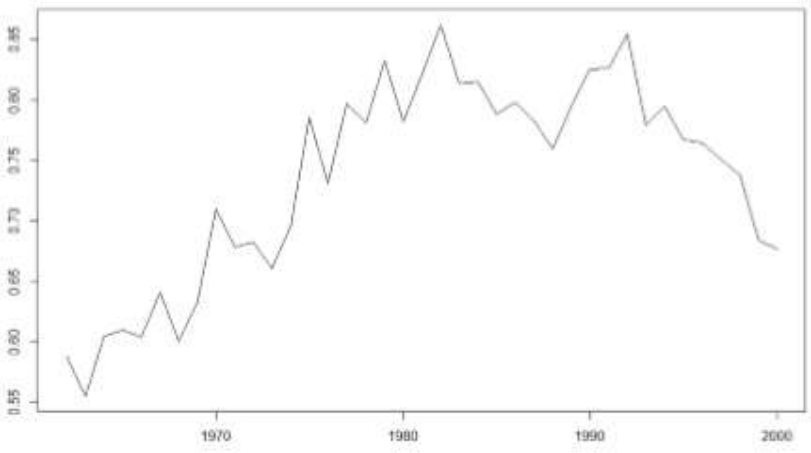
با توجه به شکل (۳. ۴) می بینیم که مرگ و میر افراد سالخورده از سال ۱۹۶۲ تا ۲۰۰۰، با برخی نوسان‌های شدید همراه بوده است.

هر چند که یک افزایش احتمال بقاء مربوط به زنان آمریکایی در قرن ۲۱ اتفاق رخ داده است، که در این نمودار نیامده است. این مسأله در رائو و همکاران (۲۰۰۸) مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین در پرستون و وانگ (۲۰۰۶) دال و همکاران (۲۰۰۴) کیرنز و کلینو (۲۰۱۱) بررسی شده است که، کاهش در مرگ و میر افراد سالخورده، ارتباط تنگاتنگی با کاهش در مصرف سیگار افراد دارد. همچنین درهو و پرستون (۲۰۱۰) برای افزایش احتمال بقای سالخورده ها، به عواملی از جمله پیشرفت چشمگیر در امکانات

[Downloaded from mail.jnraims.ir on 2026-11-19]

نجات دهنده ی زندگی توسط نظام مراقبت از سلامت در سنین بالای آمریکا مخصوصا در مقایسه با سایر کشورها اشاره شده است.

پرستون (۲۰۰۷) نوعی ارتباط مرگ و میر به سطحی از درآمد ناخالص داخلی را بررسی می‌کند. دلیل چنین ارتباطی این است که با افزایش درآمد ناخالص داخلی، رفاه اجتماعی که در اختیار مردم قرار می‌گیرد نیز افزایش می یابد.



شکل ۳. ٤: مقادیر پیشین عامل ریسک $v^{۳}$ برای زنان ایالات متحده ی آمریکا

ارزیابی تعهدهای یک صندوق با مزایای تعریف شده

یک طرح صندوق با مزایای تعریف شده را در نظر بگیرید. فرض کنید $E_{x,t}$ نمایانگر تعداد افراد به سن x، در زمان $\mathbf{t}$ باشد. تعداد بازمانده های $E_{x+۱,t+۱}$ در میان $E_{x,t}$ فرد، در طول سال [$\mathbf{t}$, $\mathbf{t}$ +۱] را می‌توان با توزیع دو جمله ای به صورت زیر توصیف کرد:

$$E_{x+۱,t+۱} \sim Bin\left(E_{x,t}, p_{x,t}\right) \qquad (۱.۳)$$

عدم قطعیت در مقادیر آتی $p_{x,t}$، بیانگر ریسک مرگ و میر سیستماتیک است. حتی اگر احتمال های بقاء به درستی شناخته شده باشند، اندازه ی جمعیت در آینده به صورت تصادفی خواهد بود، که ریسک مرگ و میر غیر سیستماتیک به شمار می آید. در عمل پیش بینی تعداد افراد به سن $\mathbf{x}$+۱ در زمان $\mathbf{t}$ +۱ با

[Downloaded from mail.jnraims.ir on 2026-11-19]

فرمول میانگین یا $E_{x,t}\ p_{x,t}$ صورت می‌گیرد. در صورتی که تعداد بیمه شده ها کم باشد، میانگین توزیع دو جمله ای (۳. ۱) می تواند تفاوت معنی داری با مقدار محقق شده داشته باشد.

محاسبه ی سرمایه ی اولیه ی لازم برای ایفای تعهدها

یک روش پرکاربرد برای تعیین مقدار تعهدهای صندوق های بازنشستگی، محاسبه‌ی حداقل سرمایه ی مورد نیاز برای پوشاندن ادعاها در یک سطح معینی از ریسک است که این مقدار به عامل های درونی زیر وابسته است:

توزیع احتمال: بیان توسعه ی آتی بازگشت های سرمایه‌گذاری و ادعاهای بیمه ای هر دو شامل عدم قطعیت های معنی داری است.

ترجیح های ریسک: سطحی از ریسک است که در آن سرمایه ی اولیه، تعهدهای صندوق را می پوشانند که به جای استفاده از سطح‌های معنی داری ساده، از اندازه‌های ریسک که بهترین پوشش مدیریتی ریسک را دارند، استفاده خواهیم کرد.

رویکرد مقابله با ریسک: این رویکرد بر طبق اینکه سرمایه‌ی مورد نظر به چه نحوی در بازارهای مالی سرمایه گذاری می‌شود، می‌باشد. بر طبق انتخاب رویکرد سرمایه گذاری مناسب، می‌توان سرمایه‌ی اولیه‌ی مورد نیاز را کاهش داد.

در ادامه ما در دو چارچوب مدل بندی قطعی و احتمالی، به ارزیابی تعهدها می پردازیم.

روش مدل بندی غیر تصادفی

در این بخش فرض می‌کنیم که مقادیر مزایای سالانه که صندوق باید بپردازد و بازگشت‌های سرمایه گذاری غیر تصادفی هستند. فرض کنید هر مبلغی که در بازارهای مالی سرمایه گذاری می‌شود، با نرخ بازگشت R_t در دوره ی زمانی [$\mathbf{t}$ و $\mathbf{t}$-۱] که، $\mathbf{t}$ = ۱, ۰۰۰ , $\mathbf{T}$ باز می‌گردد. سرمایه ی اولیه ی مورد نیاز w_0 برای پوشاندن تمامی مزایایی که در طول دوره ی $\mathbf{T}$، صندوق باید بپردازد، با حل معادله های زیر به دست می آید.

$$w_t = R_t w_{t-1} - c_t \quad t = 1, \ldots, T \qquad (۵.۳)$$

$$w_T = 0 \qquad (۶.۳)$$

[Downloaded from mail.jnraims.ir on 2026-11-19]

در مدل بندی قطعی، محاسبه ی مقدار سرمایه ی اولیه، متناظر با رویکرد ارزیابی تعهدها در دستورالعمل توانگری مالی می باشد. معادله ی (۳. ۵) را می توان به صورت

$$w_T = w_0 \Pi_{t=1}^{T} R_s - \sum_{t=1}^{T} \left(\Pi_{s=t+1}^{T} R_s\right) c_t$$

بازنویسی کرد، و با توجه به معادله ی (۳. ۶) مقدار سرمایه‌ی اولیه را می‌توان با کمک رابطه زیر به دست آورد.

$$w_0 = \sum_{t=1}^{T} \frac{c_t}{\Pi_{s=1}^{t} R_s}$$

به عنوان مثال، اگر $\mathbf{T = k}$، آنگاه

$$w_0 = \frac{c_1}{R_1} + \frac{c_2}{R_1 R_2} + \ldots + \frac{c_k}{R_1 R_2 \ldots R_k}$$

بنابراین، برای محاسبه سرمایه ی اولیه ی مورد نیاز صندوق، ارزش فعلی مزایایی که در هر دوره ی $\mathbf{t}$ صندوق باید بپردازد، در زمان $\mathbf{t = 5}$، محاسبه می‌کنیم. این مقدار متناظر است با محاسبه ی تعهدهای بیمه‌ای به صورت ارزش فعلی بیم سنجی، که برای محاسبه ی این تعهدها روشی متداول در بیمه می باشد.

روش مدل بندی احتمالی

در این بخش ارزیابی تعهدها را در حالتی که، مزایای سالیانه قابل پرداخت صندوق و بازگشت های سرمایه گذاری دارای مدل احتمالی هستند، انجام می دهیم.

این مدل بندی به آنچه که در واقعیت اتفاق میفتد نزدیک تر است. در مدل بندی احتمالی همیشه ریسک وجود دارد، به طوری که ممکن است بازگشت های سرمایه گذاری به گونه ای باشد که سرمایه ی صندوق به اندازه ی پوشاندن تعهدهایش نباشد و یا بالعکس، ممکن است بازگشت های سرمایه گذاری به نحوی باشد که سرمایه ی صندوق، بیشتر از تعهدهایش باشد. به دلیل وجود ریسک در این محاسبه ها، ارزیابی تعهدهای بیمه ای باید بر اساس ترجیح های ریسکی بیمه گر صورت گیرد.

با توجه به این توضیح ها مقدار سرمایه ی اولیه ی مورد نیاز صندوق را با حل معادله‌های زیر می‌توان محاسبه کرد.

[Downloaded from mail.jnraims.ir on 2026-11-19]

$$\begin{aligned} &\text{کمترین مقدار} \quad w_0 \\ &\text{به طوری که} \quad w_t = R_t w_{t-1} - c_t \quad t = 1,\dots,T \qquad (۷.۳) \\ &w_T \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

که در آن $\mathcal{A}$ مجموعه ی قابل قبولی است، که با توجه به ترجیح های ریسک بیمه گر بر روی سرمایه‌ی نهایی، تعیین می‌شود. با توجه به مدل بندی مزایای سالیانه قابل پرداخت توسط صندوق و بازگشت های سرمایه گذاری، به عنوان متغیرهای تصادفی، می توان نتیجه گرفت که سرمایه ی نهایی صندوق نیز تصادفی است.

مجموعه ی $\mathcal{A}$ را می توان به صورت مجوعه ی زیر که دارای شرایط مشخصی بر روی اندازه ی ریسک ρ می باشد، تعریف کرد.

$$\mathcal{A} = \{w_T | \rho(w_t) \leqslant 0\}$$

حداقل مقدار سرمایه ی اولیه ی مورد نیاز برای تأمین اعتبار کردن کل مزایای سالیانه ی صندوق در طول دوره طرح را بر اساس معادله های (۴. ۹) و با توجه به عوامل درونی زیر محاسبه خواهیم کرد.

توزیع احتمالی: مقادیر مزایای سالانه ی $c = (c_t)_{t=1}^{T}$، و بازگشت‌های سرمایه‌گذاری به صورت متغیرهای تصادفی $R = (R_t)_{t=1}^{T}$ در نظر گرفته شده است.

ترجیح های ریسک: با تعریف مجموعه ی قابل قبول $\mathcal{A}$ مقدار سرمایه‌ی اولیه با توجه به تصمیم بیمه گر محاسبه می شود.

استراتژی سرمایه گذاری: رویکرد سرمایه گذاری صندوق، نقش مؤثری بر سرمایه‌ی صندوق دارد، با انتخاب مناسب این رویکردها می‌توان بر محاسبه ی مقدار سرمایه ی اولیه ی صندوق تأثیر بسیاری گذاشت.

در ادامه‌ی این بخش، روش دیگری را برای محاسبه‌ی اولیه بررسی می کنیم، به طور متداول پر کاربردترین روش ارزیابی تعهدهای بیمه ای بر مبنای برآورد خوب بیم سنجی است، که به عنوان مقدار مورد انتظار

[Downloaded from mail.jnraims.ir on 2026-11-19]

ادعاهای کاهش یافته، به دست می آید. این رویکرد، در دستورالعمل توانگری مالی نیز به کار برده شده است.

قضیه ۳. ۴. ۱ برآورد خوب: در مورد ریسک خنثی که در آن $\rho(X)=E[X]$، سرمایه ی اولیه‌ی مورد نیاز برابر است با

$$w_0=\frac{\sum_{t=1}^{T}E\left(\Pi_{s=t+1}^{T}R_s c_t\right)}{E\left(\Pi_{s=1}^{T}R_s\right)}$$

در حالت خاصی که بازگشت های سرمایه ی $\mathbf{R_8}$ از مقادیر گذشته اش و مزایای $\mathbf{c_t}$ مستقل است، برآورد خوب آماری به صورت زیر به دست می آید:

$$w_0=\sum_{t=1}^{T}\frac{\bar{c}_t}{\Pi_{s=1}^{t}\bar{R}_s} \qquad (۸.۳)$$

که در آن $\bar{c}_t=E(c_t)$ و $\bar{R}_s=E(R_s)$.

با کمک معادله ی بازگشتی

$$w_T=w_0\Pi_{t=1}^{T}R_s-\sum_{t=1}^{T}\left(\Pi_{s=t+1}^{T}R_s\right)c_t$$

که در آن $\Pi_{s=T+1}^{T}R_s:=1$، به راحتی می توان (۳. ۸) را اثبات کرد.

اثبات: با توجه به اندازه ی ریسک $\rho(X)=E(X)$، هنگامی که $E(w_T)=0$، با کمک رابطه ی بازگشتی می توان این قضیه را اثبات کرد.

با گرفتن امید ریاضی از طرفین رابطه و با توجه به $\Pi_{s=T+1}^{T}R_s:=1$ داریم:

$$0=w_0E\left(\Pi_{s=1}^{T}R_s\right)-\sum_{s=t+1}^{T}\left(\Pi_{s=t+1}^{T}R_s\right)c_t$$

و در نهایت رابطه ی زیر را خواهیم داشت.

[Downloaded from mail.jnraims.ir on 2026-11-19]

$$w_0 = \frac{\sum_{t=1}^{T} E\left(\Pi_{s=t+1}^{T} R_s c_t\right)}{E\left(\Pi_{s=1}^{T} R_s\right)} \qquad (۹.۳)$$

اگر فرض کنیم که $\mathbf{R_t}$ از مزایای بازنشستگی $\mathbf{c_t}$ مستقل هستند، می توان عبارت زیر را نتیجه گرفت،

$$E\left(\Pi_{s=t+1}^{T} R_s c_t\right) = E\left(c_t\right) E\left(\Pi_{s=t+1}^{T} R_s\right) \qquad (۱۰.۳)$$

و به علاوه، اگر به نظر برسد که $\mathbf{R_t}$ از مقادیر گذشته اش مستقل است، می توان عبارت زیر را نوشت.

$$E\left(\Pi_{s=t+1}^{T} R_s c_t\right) = E\left(c_t\right) \Pi_{s=t+1}^{T} E\left(R_s\right) \qquad (۱۱.۳)$$

با توجه به روابط (۳. ۱۰) و (۳. ۱۱) عبارت (۳. ۹) را به صورت زیر بازنویسی می کنیم.

$$w_0 = \sum_{t=1}^{T} \frac{\overline{c}_t}{\Pi_{s=1}^{t} \overline{R}_s} \qquad (۱۲.۳)$$

که در آن $\overline{c}_t = E\left(c_t\right)$ و $\overline{R}_s = E\left(R_s\right)$.

مدل بندی احتمال های مرگ و میر با توجه به توضیحی که در بخش (۳. ۱) داده شد، برای محاسبه‌ی احتمال های مرگ و میر به کمک مدل لوژستیک ارائه شده، ابتدا باید تابع های ϕ را انتخاب کنیم. با توجه به توضیح ها، تابع های پایه ای خطی سه تکه ای را به صورت زیر را به کار می بریم:

$$\phi^1(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x-18}{32} & x \le 50 \\ 0 & x \ge 50 \end{cases}$$

$$\phi^2(x) = \begin{cases} \frac{x-18}{32} & x \le 50 \\ 2 - \frac{x}{50} & x \ge 50 \end{cases}$$

$$\phi^3(x) = \begin{cases} 0 & x \le 50 \\ \frac{x}{50} - 1 & x \ge 50 \end{cases}$$

[Downloaded from mail.jnraims.ir on 2026-11-19]

مدل بندی عامل ریسک v^2

با توجه به توضیحی که در بخش (۳. ۱. ۲) داده شد و همانطور که از شکل (۳. ۳) ملاحظه می‌شود، مقدار v_t^2 با گذشت زمان و بدون داشتن نوسان های شدید افزایش می‌یابد، در واقع واضح است که اختلاف مقدار v_t^2 ، با مقدار دوره ی قبلی خود در هر زمان برابر است با یک عدد ثابت مثبت. بنابراین مدل پیشنهادی برای این عامل را به صورت زیر ارائه می دهیم.

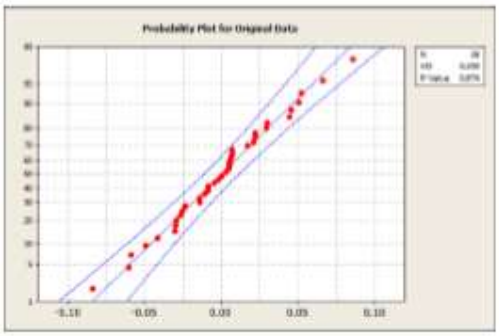
$$\Delta v_t^2 = b$$

مقدار پارامتر b برابر با ۰/۰۱۴۴ برآورد شده است، که با توجه به $p-value$ مقدار برآورد را می‌پذیریم. جدول (۴. ۱) را ببینید.

آزمون کفایت مدل

با توجه به توضیح های فصل اول، در هر مدل رگرسیونی که ارائه می شود، کفایت مدل را نیز باید ارزیابی کنیم.

همانطور که از شکل (۴. ۱) و مقدار $p-value$ مشخص استف در میابیم که باقیمانده های مدل، در سطح ۰/۰۵ نرمال هستند.



شکل ٤. ١: نمودار احتمال نرمال برای مدل رگرسیونی $\Delta v_t^2 = b$

[Downloaded from mail.jnraims.ir on 2026-11-19]

مدل بندی عامل ریسک $v^{۳}$

با توجه توضیح هایی که در بخش (۳. ۱. ۳) داده شد، می خواهیم ارتباط بین عامل ریسک $v_t^{۳}$ و تولید ناخالص داخلی **(GDP)** را با یک مدل رگرسیونی بررسی کنیم. شکل (۴. ۲) لگاریتم تولید ناخالص داخلی کشور آمریکا را نشان می‌دهد. همانطور که در بخش (۳. ۱. ۳) گفته شد در قرن ۲۱ افزایش چشمگیری در مقادیر $v_t^{۳}$، رخ می دهد، که در رسم شکل (۳. ۴) نیامده است. اما با توجه به شباهت تقریبی دو شکل یاد شده، می توان تغییرهای $v_t^{۳}$ را در ارتباط با لگاریتم تولید ناخالص داخلی را توجیه کرد.



شکل ٤. ۲ لگاریتم تولید ناخالص داخلی کشور آمریکا

از طرفی، همانطور که در شکل (۳. ۴) ملاحظه می شود، با گذشت زمان، $v_t^{۳}$ با نوسان های قابل توجهی همراه است، که می توان وجود روند به صورت کاهش و افزایش مقدار $v_t^{۳}$، در هر سال را مشاهده کرد. با تفاضلی کردن متغیر پاسخ، این روند را از بین خواهیم برد. بنابراین مدل پیشنهادی برای این عامل را به صورت زیر ارائه می دهیم.

$$\Delta v_t^{۳} = a_{۱} v_{t-۱}^{۳} + a_{۲} g_{t-۱}$$

که در آن $\mathbf{g_t}$ سرانه ی تولید ناخالص داخلی است. در بخش بعدی مدل بندی $\mathbf{g_t}$ توضیح داده خواهد شد.

[Downloaded from mail.jnraims.ir on 2026-11-19]

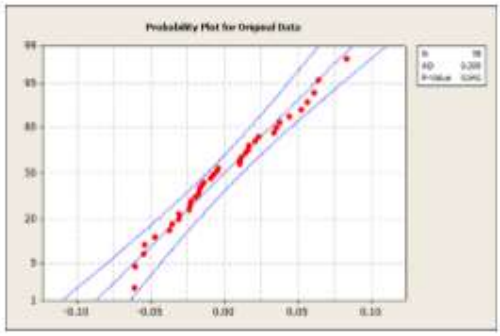
جدول (۴. ۲) نتایج تحلیل رگرسیونی را نشان می دهد.

جدول ٤. ۲: برآورد پارامترها و خلاصه ی نتایج آماری مدل $\Delta v_t^{۳} = a_۱ v_{t-۱}^{۳} + a_۲ g_{t-۱}$

ضرایب	مقدار برآورد	انحراف معیار ضریب	آماره ی آزمون	سطح معنی داری
$a_۱$	۰-۰/۱۶۱	۰/۰۸۴	۳/۳۷	۰/۰۰۷
$a_۲$	۰/۰۱۲	۰/۰۰۶	۲/۳۴	۰/۰۱۸

آزمون کفایت مدل

با توجه به شکل (۴. ۳) و مقدار $p-value$ در میابیم که باقیمانده های مدل، در سطح ۰/۰۵ نرمال هستند.

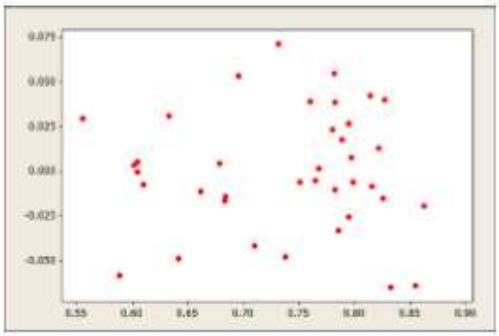


شکل ٤. ۳ نمودار نرمالیتی باقیمانده های مدل رگرسیونی

$$\Delta v_t^{۳} = b + a_۱ v_{t-۱}^{۳} + a_۲ g_{t-۱}$$

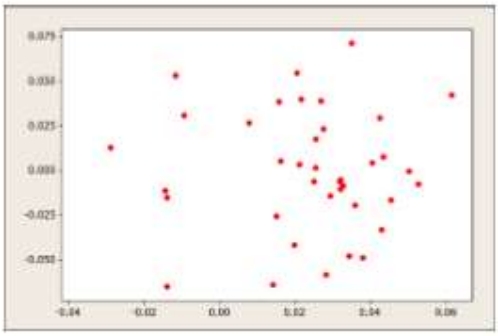
برای آزمون ثابت بودن واریانس باقیمانده ها، مقادیر باقیمانده ها را در مقابل متغیرهای پیشگو رسم می کنیم، با توجه به شکل های (۴. ۴) و (۴. ۵) که هیچ وابستگی خاصی بین باقیمانده ها و متغیرهای پیشگو نشان نمی‌دهد، در میابیم که باقیمانده ها دارای واریانس ثابتی هستند.

[Downloaded from mail.jnraims.ir on 2026-11-19]



v_t^3

شکل ٤. ٤ نمودار پراکنس باقیمانده های در مقابل متغیر پیشگوی



Δg_t

شکل ٤. ٥ نمودار پراکنش باقیمانده های در مقابل متغیر پیشگوی

تولید ناخالص داخلی و بازارهای مالی

به طور متداول ارتباط بین تولید ناخالص داخلی و بازارهای مالی پذیرفته شده است. در حالت خاص، ریسک دوره که به طور گسترده به صورت اختلاف بین نرخ های بهره وری اوراق قرضه ی کوتاه مدت و بلند مدت تعریف شده است، به نظر می‌رسد که با تغییر فعالیت اقتصادی ارتباط دارد، (وی لاک و ووهار، ۲۰۰۹).

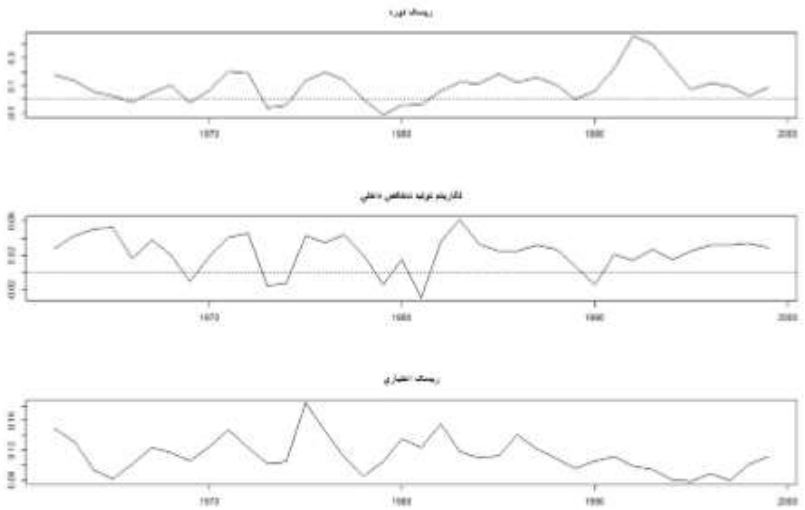
همچنین تولید ناخالص داخلی ارتباط قوی با ریسک اعتباری دارد، که چگونگی ریسک عدم پرداخت بازار را منعکس می کند، (داف و سینگلتون، ۲۰۰۳).

[Downloaded from mail.jnraims.ir on 2026-11-19]

ارتباط تولید ناخالص داخلی با نرخ های بهره

شکل (۴. ۶) ریسک دوره، اختلاف لگاریتم تولید ناخالص داخلی و ریسک اعتباری در دوره ی زمانی ۱۹۶۲-۲۰۰۰ را نشان می دهد.

می خواهیم تولید ناخالص داخلی کشور آمریکا را با متغیرهای ریسک دوره و ریسک اعتباری، مدل بندی کنیم که در آن ریسک دوره، اختلاف بین لگاریتم نرخ های بهره ی اوراق قرضه ۵ ساله و ۱ ساله و ریسک اعتباری، اختلاف بین لگاریتم نرخ های بهره ی اوراق قرضه با رتبه ی **BAA** و **AAA** می باشد.



شکل ٤. ٦: ریسک دوره، لگاریتم تولید ناخالص داخلی و ریسک اعتباری

جدول ٤. ۳ برآورد پارامترها و خلاصه ی نتایج آماری مدل $\Delta g_t = a_1 s_{t-1}^T + a_2 s_{t-1}^C$

ضرایب	مقدار برآورد	انحراف معیار ضریب	آماره ی آزمون	سطح معنی داری
a_1	۰/۰۶۸	۰/۰۳۴	۴/۲۷	۰/۰۰۰
a_2	۰/۱۴۹	۰/۰۶۰	-۲/۵۸	۰/۰۱۴

تمامی نرخ بهره ها برای انتهای سال می‌باشد. شکل (۴. ۶)، نشان می‌دهد که تغییر اختلاف لگاریتم تولید ناخالص داخلی معمولاً شبیه به تغییرهای ریسک دوره و ریسک اعتباری می‌باشد. در ادامه ارتباط بین

[Downloaded from mail.jnraims.ir on 2026-11-19]

لگاریتم سرانه ی تولید ناخالص داخلی کشور آمریکا، g_t را با ریسک دوره، s_t^T و ریسک اعتباری، s_t^C با مدل رگرسیونی

$$\Delta g_t = a_1 s_{t-1}^T + a_2 s_{t-1}^C$$

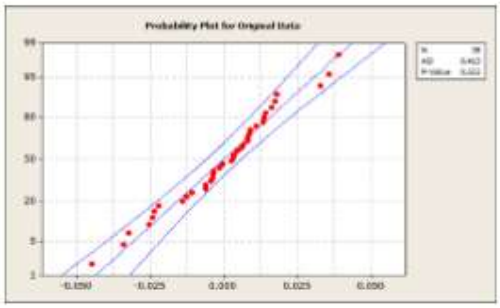
بررسی می کنیم. در بخش های بعدی به مدل بندی ریسک دوره و ریسک اعتباری خواهیم پرداخت. (وی لاک و ووهار، ۲۰۰۹) با به کار بردن تبدیل لگاریتم برای نرخ بهره و محاسبه ی ریسک دوره، و (داف و سینگلتون، ۲۰۰۳) با به کار بردن این تبدیل برای نرخ بهره و محاسبه ی ریسک اعتباری، تضمین کردند که مقادیر شبیه سازی شده این نرخ ها در آینده مثبت خواهد بود.

نتایج رگرسیونی در جدول (۴. ۳) نمایش داده شده است. پارامترهای برآورد شده a_1 و a_2 مثبت هستند.

مقدار مثبت a_1، به این معناست که با افزایش مقدار ریسک دوره، نرخ تولید ناخالص داخلی نیز افزایش می‌یابد. به عبارت دیگر، اختلاف بزرگ در نرخ بهره ی اوراق قرضه بلند مدت و کوتاه مدت، منجر به رشد اقتصادی خواهد شد و بر عکس. همچنین مقدار مثبت a_2، به معنای این است که با افزایش مقدار ریسک اعتباری، نرخ تولید ناخالص داخلی افزایش می یابد. به عبارت دیگر، اختلاف بزرگ در نرخ بهره‌ی اوراق قرضه با رتبه ی **BAA** و **AAA**، منجر به رشد اقتصادی می شود و بر عکس.

آزمون کفایت مدل

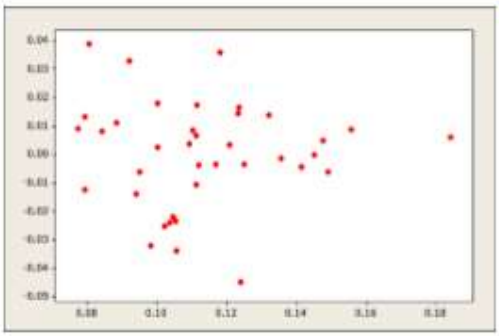
با توجه به شکل (۴. ۷) و مقدار $p-value$ در میابیم که باقیمانده های مدل، در سطح ۰/۰۵ نرمال هستند.



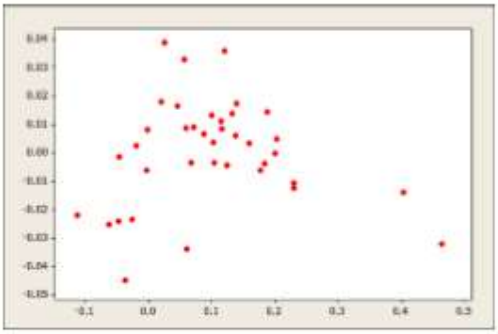
شکل ٤. ۷: نمودار نرمالیتی باقیمانده های مدل رگرسیونی $\Delta g_t = b + a_1 s_{t-1}^T + a_2 s_{t-1}^C$

[Downloaded from mail.jnraims.ir on 2026-11-19]

شکل های (۴. ۸) و (۴. ۹) هیچ الگوی مشخص را نشان نمی‌دهد، بنابراین در میابیم که باقیمانده ها دارای واریانس ثابتی هستند.



شکل ٤. ۸: نمودار پراکنس باقیمانده های در مقابل متغیر پیشگوی s^C



شکل ٤. ۹: نمودار پراکنش باقیمانده های در مقابل متغیر پیشگوی s^T

جدول ٤. ٤ برآورد پارامترها، مقدار آماره ها و خلاصه ی نتایج آماری مدل $\Delta s_t^T = a s_{t-1}^T$

سطح معنی داری	آماره ی آزمون	انحراف معیار ضریب	مقدار برآورد	ضریب
۰/۰۲۲	-۲/۳۹	۰/۱۰۳	-۰/۲۴۸	**A**

مدل بندی ریسک دوره

همانطور که در بخش (۲. ۴) در رابطه با مدل های بازگشت به میانگین، توضیح داده شد، بهترین مدل بندی برای متغیرهایی مانند نرخ بهره، مدل بازگشت به میانگین است. در این بخش با کمک مدل واسیچک ارائه شده در فصل دوم، مدل پیشنهادی برای ریسک دوره به صورت زیر می باشد.

[Downloaded from mail.jnraims.ir on 2026-11-19]

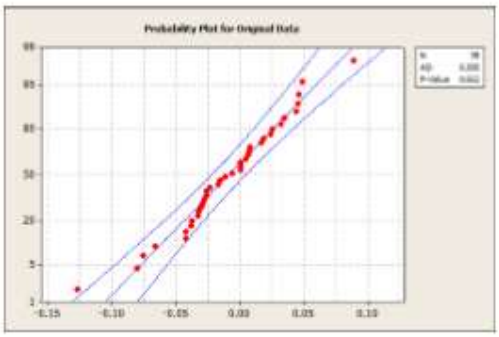
$$\Delta s_t^T = a s_{t-1}^T \qquad (1.4)$$

در واقع اگر در مدل واسیچک r_t را برابر با ab و s_t^T را برابر با مقدار صفر و $\mathbf{a}$- را برابر با مقدار ثابت $\mathbf{a}$ در مدل (۴. ۱) قرار دهیم، یک حالت خاصی از مدل واسیچک را خواهیم داشت. لازم به ذکر است که، خطاها در مدل (۴. ۱) از فرایند وینر پیروی می کنند. (بلک و کاراسینسکی، ۱۹۹۱) نتایج در جدول (۴. ۴) نمایش داده شده است.

آزمون کفایت مدل

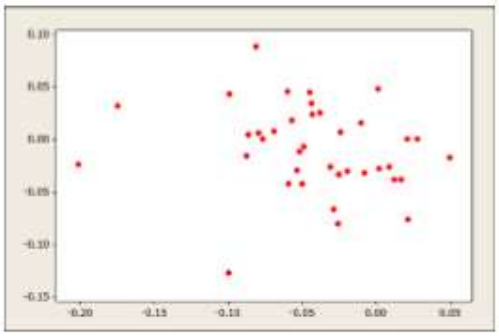
با توجه به شکل (۴. ۱۰) و مقدار $p-value$ در میابیم که باقیمانده های مدل، در سطح ۰/۰۵ نرمال هستند.

با توجه به شکل (۴. ۱۱) در میابیم که باقیمانده ها دارای واریانس ثابتی هستند.



شکل ٤. ۱۰: نمودار نرمالیتی باقیمانده های مدل رگرسیونی $\Delta s_t^T = a s_{t-1}^T$

[Downloaded from mail.jnraims.ir on 2026-11-19]



s^T **شکل ٤. ۱۱: نمودار پراکنش باقیمانده های در مقابل متغیر پیشگوی**

مدل بندی ریسک اعتباری

همانطور که در بخش (۲. ۴) در رابطه با مدل های بازگشت به میانگین، توضیح داده شد، بهترین مدل بندی برای متغیرهایی مانند نرخ بهره، مدل بازگشت به میانگین است. برای مدل بندی ریسک اعتباری کشور آمریکا از معادله ی زیر استفاده شده است.

در واقع اگر در مقابل واسیچک r_t را برابر با ab و s_t^T را برابر با مقدار ثابت **b** و **a**- را برابر با مقدار ثابت **a** در مدل (۴. ۱) قرار دهیم، یک حالت خاصی از مدل واسیچک را خواهیم داشت. لازم به ذکر است که، خطاها در مدل (۴. ۱) از فرایند وینر پیروی می کنند. (بلک و کاراسینسکی، ۱۹۹۱).

$$\Delta s_t^C = b + a s_{t-1}^C$$

نتایج در جدول (۴. ۵) نمایش داده شده است.

جدول ٤. ۵: برآورد پارامترها، مقدار آماره ها و خلاصه ی نتایج آماری مدل

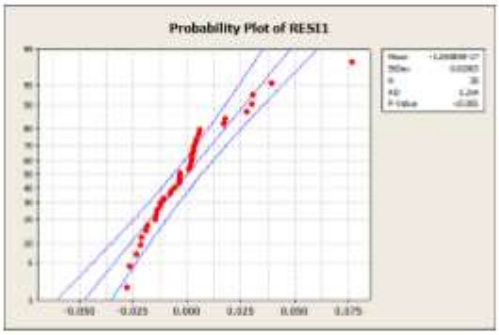
$\Delta s_t^C = b + a s_{t-1}^C$

ضریب	مقدار برآورد	انحراف معیار ضریب	آماره ی آزمون	سطح معنی داری
b	۱/۳۹۷	۰/۳۹۳	۳/۵۵	۰/۰۰۱
A	-۰/۵۰۸	۰/۱۴۱	-۳/۶۰	۰/۰۰۱

[Downloaded from mail.jnraims.ir on 2026-11-19]

آزمون کفایت مدل

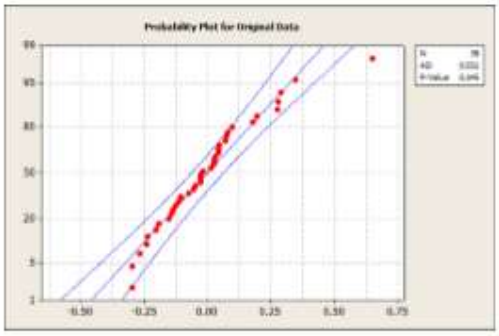
با توجه به شکل (۴. ۱۲) و مقدار $p-value$ در میابیم که باقیمانده های مدل، در سطح ۰/۰۵ نرمال نیستند.



$\Delta s_t^C = b + a s_{t-1}^C$ **شکل ٤. ۱۲: نمودار نرمالیتی باقیمانده های مدل رگرسیونی**

به کمک تبدیل جانسون در نرم افزار **Minitab**، باقیمانده را نرمال کردیم.

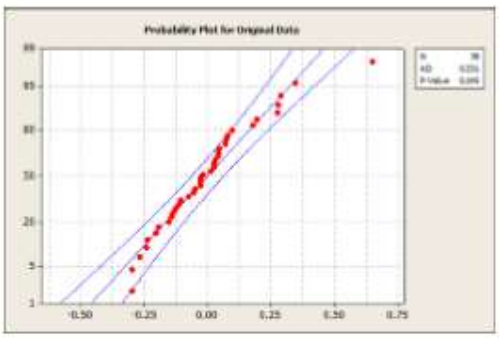
حال، شکل (۴. ۱۳) و مقدار $p-value$ نشان می دهد که باقیمانده های مدل، در سطح ۰/۰۵ نرمال هستند.



$\Delta s_t^C = b + a s_{t-1}^C$ **شکل ٤. ۱۳: نمودار نرمالیتی باقیمانده های مدل رگرسیونی**

شکل (۴. ۱۴) ثابت بودن واریانس باقیمانده ها را تضمین می کند.

[Downloaded from mail.jnraims.ir on 2026-11-19]



g^C **شکل ٤. ١٤: نمودار پراکنش باقیمانده های در مقابل متغیر پیشگوی**

بازگشت سرمایه گذاری در بخش اوراق قرضه

همانطور که در بخش (۳. ۳. ۱) گفته شد، بازگشت های سرمایه گذاری در بخش اوراق قرضه در هر زمان $\mathbf{t}$، از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$R_t^b = exp(Y_{t-1}\Delta t - D\Delta Y_t) \qquad (۲.۴)$$

با توجه به اینکه در این پایان نامه، اوراق قرضه بدون کوپن با دوره ی یکساله برای سرمایه گذاری صندوق انتخاب شده است، بنابراین مقدار دیرش اوراق قرضه برابر با یک خواهد بود. در ادامه برای مدل بندی بازده تا زمان سر رسید، $\mathbf{Y_t}$ از مدل بندی (بلک و کاراسینسکی، ۱۹۹۱)، استفاده می‌کنیم. در این روش لگاریتم بازده تا زمان سررسید، $y_t = log\,(Y_t)$ را به صورت زیر مدل بندی می‌کنیم. تبدیل لگاریتم، تضمین خواهد کرد که مقادیر شبیه سازی بازده تا زمان سررسید مثبت خواهند بود.

$$\Delta y_t = a + by_{t-1}$$

برای مدل بندی از داده های مربوط به بازده تا زمان سررسید اوراق قرضه یکساله و بدون کوپن، برای سال های ۲۰۰۰- ۱۹۶۲ استفاده کردیم. نتایج در جدول (۴. ۶) آمده است.

آزمون کفایت مدل

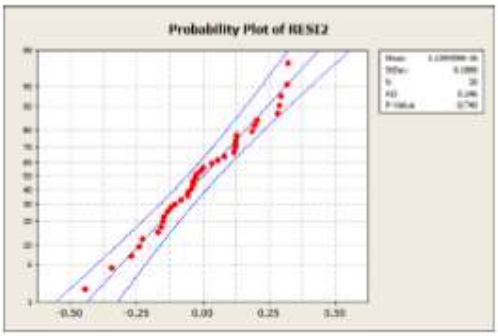
با توجه به شکل (۴. ۱۵) و مقدار $p-value$ در میابیم که باقیمانده های مدل، در سطح ۰/۰۵ نرمال هستند.

[Downloaded from mail.jnraims.ir on 2026-11-19]

جدول ٤. ٦: برآورد پارامترها، مقدار آماره ها و خلاصه ی نتایج آماری مدل

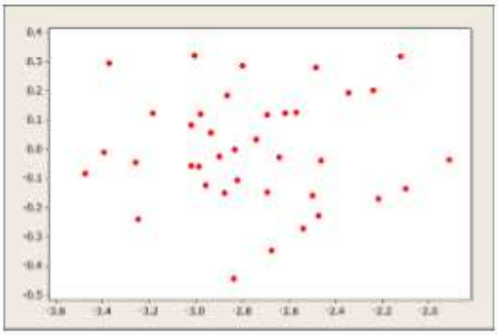
مدل $\Delta y_t = a + by_{t-1}$

ضرایب	مقدار برآورد	انحراف معیار ضریب	آماره ی آزمون	سطح معنی داری
A	-۰/۵۳۲	۰/۲۳۵	-۲/۲۶	۰/۰۳
B	-۰/۱۹۹	۰/۰۸۴	-۲/۳۶	۰/۰۲۴



شکل ٤. ١٥: نمودار نرمالیتی باقیمانده های مدل رگرسیونی $\Delta y_t = a + by_{t-1}$

شکل (۴. ۱۶) ثابت بودن واریانس باقیمانده ها را تضمین می کند.



شکل ٤. ١٦: نمودار پراکنش باقیمانده های در مقابل متغیر پیشگوی y_{t-1}

[Downloaded from mail.jnraims.ir on 2026-11-19]

بازگشت سرمایه گذاری در بخش بازار سهام

همانطور که در بخش (۳. ۳. ۲) گفته شد، بازگشت های سرمایه گذاری در بخش سهام در هر زمان **t**، از رابطه ی زیر محاسبه می‌شود.

$$R_t^s = \frac{S_t}{S_{t-1}}$$

برای مدل بندی شاخص کل بازار سهام، S_t از مدل بندی (بلک و کاراسینسکی، ۱۹۹۱)، استفاده می کنیم.

در این روش لگاریتم شاخص کل، $s_t = log(S_t)$ را به صورت زیر مدل بندی می‌کنیم. تبدیل لگاریتم، تضمین خواهد کرد که مقادیر شبیه سازی شاخص بازار سهام، مثبت خواهند بود.

جدول ٤. ۷: برآورد پارامترها و $p-value$ برای $\Delta s_t = a$

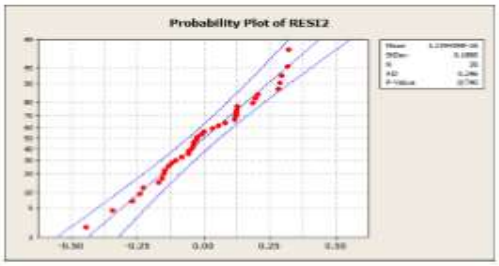
برآورد پارامتر	آماره ی آزمون	درجه ی آزادی	سطح معنی داری
۰/۰۸۰	۰/۰۰۱	۳۷	۰/۰۰۰

$$\Delta s_t = a$$

برای مدل بندی از داده های مربوط به شاخص کل بازار سهام **S&P**، برای سال های ۲۰۰۰-۱۹۶۲ استفاده کردیم. نتایج در جدول (۴. ۷) آمده است.

آزمون کفایت مدل

با توجه به شکل (۴. ۱۷) و مقدار $p-value$ در میابیم که باقیمانده های مدل، در سطح ۰/۰۵ نرمال هستند.



شکل ٤. ۱۷: نمودار نرمالیتی باقیمانده های مدل رگرسیونی $\Delta s_t = a$

[Downloaded from mail.jnraims.ir on 2026-11-19]

محاسبه ی سرمایه ی اولیه صندوق

در این بخش می خواهیم با توجه به آنچه که در بخش (۳. ۴) بحث شد، سرمایه ی اولیه ی صندوق را با استفاده از دو مدل بندی غیر تصادفی و احتمالی محاسبه کنیم.

روش مدل بندی غیر تصادفی

با توجه به توضیح های بخش (۳. ۴. ۱)، برای محاسبه ی سرمایه ی اولیه صندوق از رابطه زیر استفاده خواهیم کرد.

$$w_0 = \sum_{t=1}^{T} \frac{c_t}{\Pi_{s=1}^{t} R_s} \qquad (۳.۴)$$

در این بخش، برای محاسبه ی مقادیر مزایای پرداختی صندوق در هر دوره، ابتدا باید تعداد افرادی که در هر دوره زنده هستند را با کمک احتمال های بقای جدول عمر محاسبه کنیم. از آنجاییکه افراد مورد مطالعه در این پایان نامه زنان ۶۵ ساله آمریکایی هستند و با توجه به اینکه سال پایه ای که در نظر گرفته ایم، سال ۲۰۰۱ می باشد، از احتمال های بقای زنان آمریکایی در سال ۲۰۰۱ که از سایت مجموعه داده های مرگ و میر انسانی جمع آوری شده است، استفاده می کنیم.

محاسبه احتمال های بقاء تا ۳۵ سال آینده

از آنجاییکه در رابطه ی (۴. ۳) مقادیر مزایای سالیانه $\mathbf{c_t}$، و بازگشت های سرمایه گذاری $\mathbf{R_t}$، غیر تصادفی هستند، بنابراین برای محاسبه مزایای سالیانه با توجه به احتمال های بقاء، این احتمال ها را با کمک جدول عمر بدست می آوریم.

با توجه به رابطه زیر، احتمال های بقاء تا ۳۵ سال آینده با در نظر گرفتن سال پایه ۲۰۰۱، را محاسبه می کنیم.

$$ {}_tp_{۶۵} = {}_۱p_{۶۵}\,{}_۱p_{۶۶} \cdots {}_۱p_{۶۵+t-۱} \quad t = ۱, \ldots, ۳۶. \qquad (۴.۴)$$

محاسبه مزایای سالیانه که صندوق می پردازد

فرض می کنیم که اعضای اولیه ی صندوق در زمان $\mathbf{t} = ۰$، ۱۰۰ نفر می باشد. با استفاده از رابطه‌ی زیر تعداد افراد زنده در هر دوره را محاسبه می کنیم.

$$E_{x,t} = E_{x-۱,t-۱}\,p_{x-۱,t-۱} \qquad (۵.۴)$$

[Downloaded from mail.jnraims.ir on 2026-11-19]

که در آن، $E_{x,t}$ تعداد افراد x ساله، در دوره ی t، و $p_{x-۱,t-۱}$ احتمال آن است که، یک فرد $x-۱$ ساله در دوره $t-۱$، تا یک سال بعد زنده باشد.

محاسبه بازگشت های سرمایه گذاری

به دلیل مدل بندی غیر تصادفی و با توجه به دستورالعمل توانگری مالی، محاسبه های این قسمت با توجه به روش گذشته نگر انجام می‌شود. ما برای مقادیر بازگشت‌های سرمایه‌گذاری در این قسمت، میانگین بازگشت‌های سرمایه گذاری در بازار اوراق قرضه در ۲۰ سال گذشته (سالهای ۲۰۰۰-۱۹۸۰) را در نظر می گیریم.

$$R_۱, R_۲, \ldots, R_{۳۵} = ۱/۰۷$$

سرمایه‌ی اولیه ی صندوق

فرض می کنیم، تعداد اعضای اولیه ی صندوق در زمان $t = ۰$ یا سال ۲۰۰۱، برابر با ۱۰۰ نفر باشد. در این صورت سرمایه ی اولیه ی صندوق برای هر فرد برابر با مقدار ۶/۴۰۹ می باشد.

روش مدل بندی احتمالی

در بخش (۳. ۴. ۲) دو روش محاسبه برای سرمایه ی اولیه در قالب مدل بندی احتمالی، ارائه دادیم. برای انجام محاسبه‌ها با کمک هر دو روش، ابتدا باید مقادیر مزایای سالیانه ی قابل پرداخت صندوق و بازگشت‌های سرمایه گذاری در هر دوره را شبیه سازی کنیم.

همانطور که در فصل ۳ گفتیم، مقدار مزایای سالیانه ی صندوق، از رابطه زیر محاسبه می شود.

$$c_t = \frac{I_t}{I_۰} \sum_{x \in X} d_x E_{x,t} \qquad (۶.۴)$$

در این پایان نامه، فرض می کنیم مقدار مزایای سالیانه برای هر فرد عضو صندوق یک واحد است و با گذشت زمان افزایش نمی‌یابد. بنابراین مقدار شاخص d_x و نسبت $\frac{I_t}{I_۰}$، در رابطه (۴. ۶) برابر با یک خواهد بود. پس مقدار مزایای سالیانه قابل پرداخت در هر دوره یک متغیر دو جمله ای می باشد. همچنین، تعداد افراد در هر دوره را یک متغیر دو جمله ای به صورت زیر تعریف کردیم.

$$E_{x+۱,t+۱} \sim Bin\left(E_{x,t}, p_{x,t}\right) \qquad (۷.۴)$$

[Downloaded from mail.jnraims.ir on 2026-11-19]

با استفاده از مدل بندی احتمال های بقاء در بخش (۴. ۲) این احتمال ها را برای زنان ۶۵ ساله آمریکاف در سال پایه ۲۰۰۱، تا ۳۵ سال بعد پیش بینی می کنیم و با در نظر گرفتن تعداد اعضای اولیه در زمان $t = ۰$ به صورت دلخواه، تعداد افراد زنده و مقدار مزایای پرداختی صندوق، در هر دوره را محاسبه می کنیم.

در بخش (۴. ۴) و (۴. ۵) بازگشت های سرمایه گذاری در بازار اوراق قرضه و سهام را مدل بندی کردیم. حال با کمک این مدل بندی ها، مقادیر بازگشت های سرمایه گذاری را برای ۳۵ سال آینده با در نظر گرفتن سال پایه ۲۰۰۱، پیش بینی می کنیم و در نهایت با کمک رابطه زیر بازگشت سرمایه گذاری صندوق را محاسبه خواهیم کرد.

$$R_t = R_t^{۱}\pi_t^{۱} + R_t^{۲}\pi_t^{۲} \qquad (۸.۴)$$

که در آن $R_t^{۱}$ و $\pi_t^{۱}$ به ترتیب بازگشت سرمایه گذاری و نسبت سرمایه گذاری در بازار اوراق قرضه و $R_t^{۲}$ و $\pi_t^{۲}$ به ترتیب بازگشت سرمایه گذاری و نسبت سرمایه گذاری در بازار سهام است و نسبت های سرمایه گذاری با توجه به دو رویکرد کم ریسک و ریسکی، متفاوت می باشد. ابتدا محاسبه ی سرمایه‌ی اولیه با روش محاسبه ی زیر را شرح می دهیم.

$$\begin{aligned} &\text{کمترین مقدار} \quad w_۰ \\ &\text{به طوری که} \quad w_t = R_t w_{t-۱} - c_t \quad t = ۱,\dots,T \\ &\qquad\qquad w_T \in \{w_T | \rho(w_t) \leqslant ۰\} \end{aligned} \qquad (۹.۴)$$

در این روش اندازه ی ریسک را به دلخواه، مخاطره آنتروپی در نظر گرفتیم. از آنجایی که انتظار داریم مقدار سرمایه ی نهایی در انتهای سال ۳۵ صفر یا عدد منفی نزدیک به صفر شود شرط مثبت نبودن اندازه‌ی ریسک با مقدار سرمایه ی نهایی را قرار دادیم.

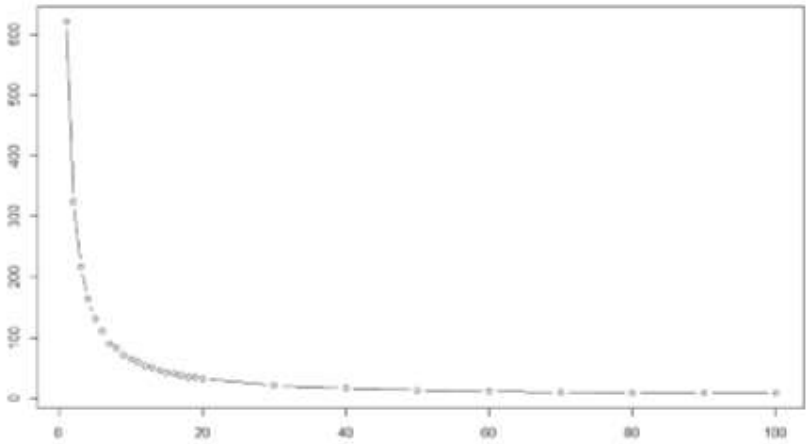
در این روش به تعداد ۵۰۰۰ مرتبه مراحل (۴. ۹) را با در نظر گرفتن مقدار ضریب ریسک گریزی ۰. ۰۵ تکرار می‌کنیم. به این صورت که در هر بار تکرار مقدار دلخواه سرمایه ی اولیه را قرار داده و در نهایت مقدار سرمایه در سال ۳۵ را محاسبه می کنیم، و سپس کوچکترین مقدار سرمایه ی اولیه که اندازه مخاطره‌ی آنتروپی را منفی می‌کند به عنوان مقدار قابل قبول انتخاب می‌کنیم.

از آنجایی که می‌خواهیم تأثیر ریسک مرگ و میر غیر سیستماتیک را بر روی مقدار سرمایه ی اولیه ی مورد نیاز برای هر فرد عضو صندوق نشان دهیم، تمامی مراحل گفته شده را برای حالت‌هایی که تعداد اعضای اولیه‌ی صندوق از ۱ تا ۱۰۰ نفر تغییر می‌کند انجام دادیم. مقدار سرمایه‌ی اولیه‌ی صندوق هنگامیکه

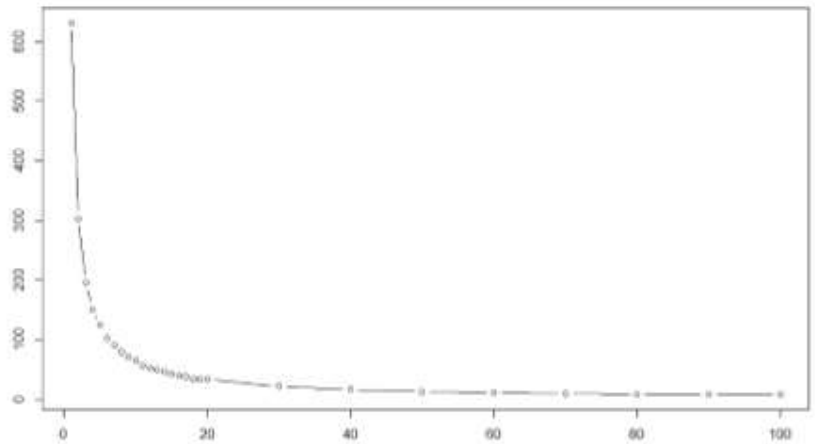
[Downloaded from mail.jnraims.ir on 2026-11-19]

تعداد اعضای اولیه ۱۰۰ نفر می باشد، برای ضریب ریسک گریزی ۰. ۰۵ در رویکرد کم ریسک برابر با ۹/۱۱۴ و در رویکرد ریسکی برابر با ۸/۸۵۰ محاسبه شده است.

مقدار سرمایه ی اولیه برای هر فرد عضو صندوق، در رویکرد کم ریسک، π^S همواره بیشتر از رویکرد ریسکی π^R است.



شکل ٤. ۱۸: سرمایه‌ی اولیه‌ی مورد نیاز برای هر فرد عضو صندوق، با رویکرد سرمایه گذاری کم ریسک



شکل ٤. ۱۹: سرمایه‌ی اولیه‌ی مورد نیاز برای هر فرد عضو صندوق، با رویکرد سرمایه گذاری ریسکی

[Downloaded from mail.jnraims.ir on 2026-11-19]

همانطور که از شکل‌های (۴. ۱۸) و (۴. ۱۹) پیداست، با افزایش تعداد اعضای اولیه صندوق مقدار سرمایه‌ی اولیه‌ی مورد نیاز برای هر فرد نیز کاهش می یابد.

جدول ٤. ٨: ریسک سیستماتیک، سرمایه ی اولیه ی مورد نیاز برای هر فرد

برآورد خوب بیم سنجی	اندازه ریسک خنثی	اندازه مخاطره ی آنتروپی	اندازه ریسک به کار رفته
۸/۹۳۴	۸/۸۳۲	۹/۱۱۴	π^S
۸/۸۴۵	۸/۱۰۴	۸/۸۵۰	π^R

در ادامه به محاسبه ی سرمایه ی اولیه با استفاده از رابطه ی زیر می پردازیم.

$$w_0 = \frac{\sum_{t=1}^{T} E\left(\Pi_{s=t+1}^{T} R_s c_t\right)}{E\left(\Pi_{s=1}^{T} R_s\right)} \qquad (۱۰.۴)$$

در این روش نیز به تعداد ۵۰۰۰ مرتبه، شبیه سازی‌های هر متغیر را انجام داده و سپس با گرفتن امید ریاضی، مقدار سرمایه‌ی اولیه را برای حالتی که تعداد اعضای اولیه صندوق ۱۰۰ نفر می باشد، محاسبه می‌کنیم. این مقدار با استفاده از رویکرد ریسکی برابر با ۸/۱۰۴ و با استفاده از رویکرد کم ریسک مقدار برابر با ۸/۸۳۲ برآورد شده است.

جمع بندی

خلاصه نتایج عددی این فصل را در جدول (۴. ۸) آورده ایم. با ملاحظه این جدول در میابیم که سرمایه‌ی اولیه برای رویکرد کم ریسک همواره بیشتر از رویکرد ریسکی می باشد. مقدار سرمایه ی اولیه در روش اندازه ریسک خنثی، همواره کوچکتر از مقادیر محاسبه شده در روش برآورد خوب بیم سنجی است، این تفاوت مقدار به دلیل آن است که در روش اندازه ی ریسک خنثی فرض های وابسته بودن بازگشت های سرمایه گذاری به مقادیر گذشته اش و به مزایای سالیانه لحاظ می شود.

پیشنهادها برای کارهای آتی

در این مطالعه برای مدل بندی بازگشت سرمایه گذاری در بخش بازار سهام، از رابطه ای استفاده شد که تنها شامل شاخص بازار سهام در هر دوره بود. اما در واقع بازگشت سرمایه گذاری در بازار سهام می تواند متأثر از متغیرهای دیگری از جمله قیمت سهام در هر دوره باشد. همچنین در مدل بندی تولید ناخالص داخلی از متغیرهای ریسک دوره و ریسک اعتباری استفاده کردیم، که می‌توان برای مدل بندی بهتر و دقیق تر، متغیرهای دیگری از جمله نرخ تورم، تعداد افراد شاغل و میزان بهره وری را نیز به کار برد.

[Downloaded from mail.jnraims.ir on 2026-11-19]

همچنین در بررسی ریسک های سیستماتیک و غیر سیستماتیک مرگ و میر، می توان این ریسک ها را در حالت های مختلفی از صندوق های بازنشستگی با تعداد اعضای متفاوت، اندازه گیری نمود.

بنابراین در نظر گرفتن این عوامل برای مدل بندی ها، موضوعی است که می توان در کارهای آتی به آن پرداخت.

[Downloaded from mail.jnraims.ir on 2026-11-19]